Noktalar Kümesini Saran En Küçük Hacimli Elipsin Yarı-Kesin Optimizasyon Tekniği ile Bulunması

Ahmet Taha Koru

Yıldız Teknik Üniversitesi, Mekatronik Mühendisliği Bölümü, İstanbul, Türkiye

Özet

Geometrik n-boyutlu bir elipsin, N adet noktayı sarmasını sağlayan kısıt koşulları ortaya konmuştur. Sonra elipsin hacmi, optimizasyon problemine maliyet fonksiyonu olarak girilmiştir. Yarı-kesin optimizasyon problemi, Matlab programında çözülmüştür.

Keywords:
Yarı-kesin optimizasyon, elips hacmini enküçükleme, yalmip

1. Optimizasyon Formülasyonu

Bir n-boyutlu elips çevresi ve iç noktalarını içeren küme aşağıdaki gibi tarif edilir.

$$\xi = \left\{ x \,|\, (x-c)^T A (x-c) \leq 1 \,,\, x \in \mathbb{R}^{n\times 1} \right\}. \tag{1}$$

Yukarıdaki kümede, $c \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ elipsin merkez noktasıdır ve $A = A^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simetrik matrisi elipsin rotasyon ve yarıçap bilgilerini içermektedir.

Varsayalım ki elimizde N adet nokta bulunmaktadır. Bu noktalar

$$\{ x_1, x_2, \ldots, x_N \}$$

olsun. Bu noktaların elipsin içinde olmasını istediğimiz için, noktalar Denklem (1)'deki kümeye dahildirler. Dolayısı ile herbir i için,

$$(x_i - c)^T A (x_i - c) \leq 1, \tag{2}$$

eşitsizliği sağlanmalıdır. Bu eşitsizliği linear matris eşitsizliği (LMI) formuna getirmek için, önce aşağıdaki değişken değişimlerini tanımlayalım.

$$\bar{A} = A^{1/2}, \qquad \bar{c} = -\bar{A}c, \tag{3}$$

Denklem (3)'deki değişikliklerden sonra, Denklem (2)'deki eşitsizlik,

$$\begin{aligned} \left(\bar{A}x_i + \bar{c}\right)^T \left(\bar{A}x_i + \bar{c}\right) &\leq 1 \\ 1 - \left(\bar{A}x_i + \bar{c}\right)^T \left(\bar{A}x_i + \bar{c}\right) &\geq 0, \end{aligned} \tag{4}$$

haline gelir. Eşitsizlik (4)'ün Schur tamlayanı aşağıdaki gibidir,

$$\begin{bmatrix} I & \bar{A}x_i + \bar{c} \\ * & 1 \end{bmatrix} \succeq 0.$$

Elipsin rotasyona uğramadan önceki yarıçapları, A matrisinin özdeğerleri ile ilintilidir. A matrisinin özdeğerlerini $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ olarak adlandırırsak, elipsin yarıçapları

$$\sqrt{\lambda_1^{-1}}, \sqrt{\lambda_2^{-1}}, \cdots, \sqrt{\lambda_n^{-1}}$$

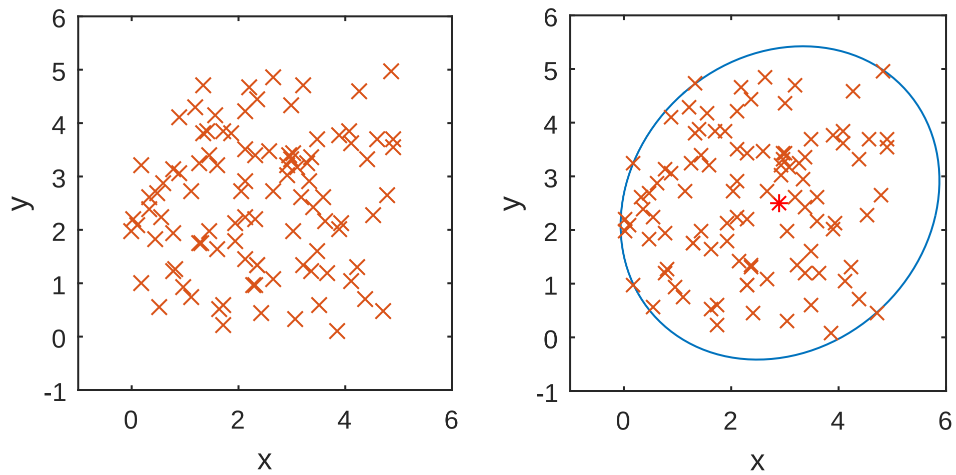
olmaktadır. Dolayısıyla elipsin hacmi $\det A^{-1}$ ile doğru orantılıdır. Matris determinantını enküçüklemek için, konveks veya konkav olmayan determinant işlevi yerine, konkav yapıdaki determinantın logaritması işlevi enküçüklenir [1]. Matrisin tersi ile de uğraşmamak için, maliyet fonksiyonunu $-\log\det\bar{A}$ olarak seçersek, bu işlevin en küçüklemesi, elipsin en küçük hacime sahip olması anlamına gelir.

Dolayısı ile, N adet x_i noktasını kapsayan, en küçük hacimli elipsi bulma problemi, aşağıdaki yarı-kesin optimizasyon problemi şeklinde formülize edilir.

$$\begin{aligned} \min \quad & -\log\det\bar{A} \\ \text{subject to} \quad & \bar{A} \succeq 0 \\ & \begin{bmatrix} I & \bar{A}x_i + \bar{c} \\ * & 1 \end{bmatrix} \succeq 0, \quad \forall i \in \{1, 2, \cdots, N\} \end{aligned}$$

2. Matlab Aracılığı ile Çözüm

Yarı-kesin programlama problemlerini Matlab ile modellemek için yaygın olarak kullanılan Yalmip eklentisi, internet üzerinden ücretsiz olarak edinilebilir [2]. Bu çalışmada, opti-



Şekil 1: 100 farklı noktayı kapsayan en küçük elips

mizasyon problemimiz log det içerdiği için, çözücü olarak iste SDPT3 eklentisi kullanılmıştır [3]. Çözümü görselleştirmek için ise [4]'teki skript kullanılmıştır.

Örnek olarak, 100 tane rastgele noktayı saran elips buldurulmuştur. Örneğin çözümü Şekil 1'de görülmektedir. Örneğin çözümünde kullanılan kod parçası aşağıda verilmiştir.

```
ops = sdpsettings('solver','sdpt3');

n = 2;   % Elipsin boyutu
N = 100; % Elipsin kapsayacagi noktalarin sayisi

points.x = rand(N,1)*5; % N adet nokta icin rastgele x koordinatlari uret
points.y = rand(N,1)*5; % N adet nokta icin rastgele y koordinatlari uret

A = sdpvar(n);
b = sdpvar(n,1);

Fset = [A ≥ 0]; % Birinci kisitimiz, pozitif yari-kesin A
% Her bir nokta icin elipsin icinde olma LMI kosullari
for k = 1:length(points.x)
    pk = [points.x(k), points.y(k)];
    LMI1 = [eye(2)              , A*pk' + b;
            transpose(A*pk' + b), 1         ];
    Fset = Fset + [LMI1 ≥ 0];
end
sol = optimize(Fset, [-logdet(A)], ops); % Optimizasyon problemini coz
% Optimum A ve b degerlerinin double'a cevirilmesi
Ad = double(A); bd = double(b);

% Degisken degisimlerinden onceki degerler ile elips cizimi
Ellipse_plot(Ad^2, -inv(Ad)*bd);
hold on;
plot(points.x, points.y, 'x');
xlabel('x');
ylabel('y');
```

3. Kaynaklar

[1] Boyd, S., ve Vandenberghe, L. Convex optimization. Cambridge university press, 2004.

[2] Löfberg, J. "YALMIP: A toolbox for modeling and optimization in MATLAB." Computer Aided Control Systems Design, 2004 IEEE International Symposium on. IEEE, 2004.

[3] Toh, K. C., Todd, M. J., ve Tütüncü, R. H.. "SDPT3—a MATLAB software package for semidefinite programming, version 1.3." Optimization methods and software 11.1-4 (1999): 545-581.

[4] Moshtagh, N. "Plot An Ellipse In Center Form". 2016.
http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/13844-plot-an-ellipse-in–center-form-